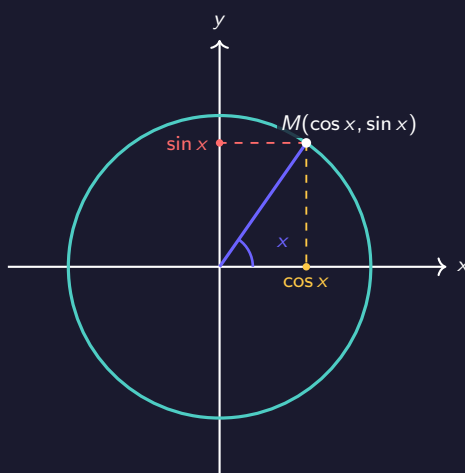


FICHE 06

Trigonométrie

Cercle & radian ■ Cosinus & sinus ■ Parité & périodicité



Première ■ Spécialité Mathématiques ■ Programme officiel



Table des matières

1	Pourquoi étudier la trigonométrie ?	3
1.1	Le problème fondamental	3
1.2	L'idée directrice	3
2	L'idée avant la formule	4
2.1	Le radian : mesurer un angle par une longueur	4
2.2	Enrouler la droite sur le cercle	4
2.3	Cosinus et sinus : les coordonnées de M	5
3	Le cours complet	6
3.1	Le radian	6
3.2	Le cercle trigonométrique et l'enroulement	6
3.3	Cosinus et sinus d'un réel	7
3.4	Valeurs remarquables	8
3.5	Angles associés	10
3.6	Les fonctions cosinus et sinus	12
3.7	Équations $\cos x = a$ et $\sin x = a$	13
3.8	Formulaire complet	14
4	Boîte à outils : réflexes pour le bac	15
5	Exercices	17
6	Problème : <i>La grande roue</i> ★★★	20
7	✓ Corrigés détaillés	21

1 Pourquoi étudier la trigonométrie ?

1.1 Le problème fondamental

Comment décrire un phénomène qui se **répète indéfiniment** ? Une balançoire, un ressort qui oscille, le son, le courant électrique, les marées, les saisons : tous reviennent régulièrement à leur point de départ. Les fonctions polynômes ou exponentielles ne peuvent pas faire ça : elles ne reviennent jamais en arrière. Il faut des fonctions **périodiques**. Ce sont les fonctions **cosinus** et **sinus**, nées de la géométrie du **cercle**.

Oscillations
pendule, ressort,
son

Électricité
courant
alternatif

**Marées
& saisons**
(périodicité)

Mouvement
circulaire,
rotations

Oscillations. La position d'un pendule ou d'une masse sur un ressort s'écrit $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$.

Électricité. En France, le courant domestique est $i(t) = I_0 \sin(2\pi \times 50 \times t)$ (50 oscillations par seconde).

Périodicité. Marées, saisons, rythmes biologiques : on les modélise avec des fonctions qui se répètent, donc avec cos et sin.

1.2 L'idée directrice

L'idée directrice :

On mesure les angles en **radians** (la longueur de l'arc sur un cercle de rayon 1). En **enroulant** la droite des réels sur le **cercle trigonométrique**, chaque nombre x désigne un point M du cercle. Le **cosinus** et le **sinus** de x sont simplement les **coordonnées** de ce point. Tout découle de la géométrie du cercle.

Intuition | Pourquoi c'est un chapitre clé

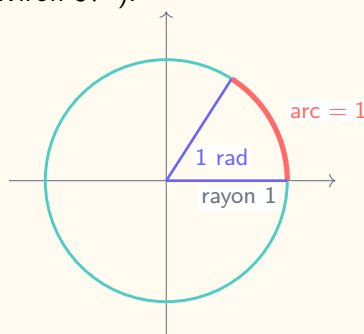
La trigonométrie relie **géométrie** (le cercle) et **analyse** (les fonctions cos, sin). C'est indispensable en physique (ondes, oscillations), et en Terminale on étudiera leurs **dérivées** $((\sin x)' = \cos x)$. Maîtriser le cercle trigonométrique, c'est avoir une « machine » qui donne toutes les valeurs et toutes les symétries d'un coup d'œil.

2 L'idée avant la formule

2.1 Le radian : mesurer un angle par une longueur

Intuition | L'angle, c'est de la longueur d'arc

Plutôt que les degrés (une convention : 360 pour un tour), on mesure un angle par la **longueur de l'arc** qu'il découpe sur un cercle de rayon 1. Cette mesure s'appelle le **radian**. Un tour complet a une longueur 2π (le périmètre du cercle de rayon 1), donc $360^\circ = 2\pi$ rad. Un angle de 1 radian découpe un arc de longueur 1 (environ 57°).

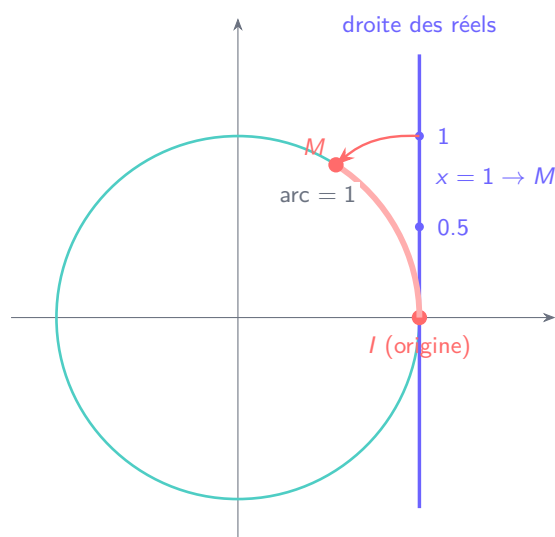


Pourquoi le radian ? Parce que c'est la seule unité où les belles formules de l'analyse sont vraies (en Terminale, $(\sin x)' = \cos x$ n'est correct qu'en radians). Le radian est l'unité **naturelle** de l'angle.

2.2 Enrouler la droite sur le cercle

Intuition | Chaque réel devient un point du cercle

Imagine la droite des nombres réels, posée verticalement et tangente au cercle au point $I(1;0)$. **Enroule** cette droite autour du cercle (vers le haut dans le sens direct, vers le bas dans l'autre sens). Alors chaque réel x vient se coller sur un point M du cercle : c'est l'**image de x** . Comme le tour fait 2π , les réels $x, x + 2\pi, x + 4\pi \dots$ tombent **tous sur le même point** : c'est l'origine de la **périodicité**.



2.3 Cosinus et sinus : les coordonnées de M

Intuition | Tout est dans les coordonnées

Une fois x placé sur le cercle au point M , on lit ses **coordonnées** : l'abscisse est le **cosinus** de x , l'ordonnée est le **sinus** de x .

$$M = (\cos x ; \sin x).$$

Comme M est sur le cercle de rayon 1, le théorème de Pythagore donne aussitôt la relation reine : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Et comme M reste dans le carré $[-1, 1] \times [-1, 1]$, on a toujours $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$.

3 Le cours complet

3.1 Le radian

Définition | Le radian

Le **radian** est l'unité de mesure d'angle telle que, sur un cercle de rayon 1, un angle de θ radians découpe un arc de **longueur** θ . Comme le périmètre du cercle de rayon 1 vaut 2π , un tour complet mesure 2π radians :

$$180^\circ = \pi \text{ rad.}$$

Méthode | Convertir degrés \leftrightarrow radians

On utilise la proportion $\frac{\text{angle en degrés}}{180} = \frac{\text{angle en radians}}{\pi}$.

degrés	0	30	45	60	90	180	360
radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

✓ Propriété | Longueur d'un arc

Sur un cercle de rayon R , un angle au centre de θ radians découpe un arc de longueur

$$L = R\theta \quad (\theta \text{ en radians}).$$

Exemple | Conversions

$60^\circ = \frac{60}{180}\pi = \frac{\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4} = \frac{3 \times 180}{4}^\circ = 135^\circ$. Sur un cercle de rayon 5 cm, l'arc correspondant à $\frac{\pi}{3}$ mesure $L = 5 \times \frac{\pi}{3} \approx 5,24$ cm.

3.2 Le cercle trigonométrique et l'enroulement

Définition | Cercle trigonométrique et image d'un réel

Le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1, **orienté** dans le sens direct (sens inverse des aiguilles d'une montre). On note $I(1; 0)$.

En enroulant la droite des réels autour de ce cercle (à partir de I), à chaque réel x correspond un unique point M du cercle : c'est l'**image de** x . Le réel x est alors une **mesure en radians** de l'angle orienté $(\widehat{OI, OM})$.

✓ Propriété | Plusieurs réels, un même point

Comme un tour complet mesure 2π , les réels qui diffèrent d'un nombre entier de tours ont la **même image** :

$$x \text{ et } x + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \text{ ont le même point } M.$$

On dit qu'ils sont **associés modulo** 2π . C'est l'origine de la **périodicité**.

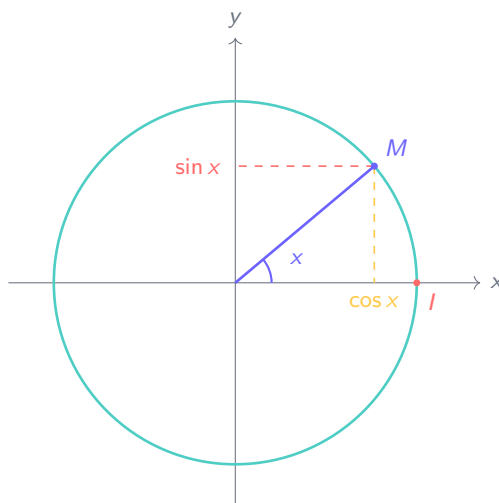
3.3 Cosinus et sinus d'un réel

Définition | Cosinus et sinus

Soit x un réel et M son image sur le cercle trigonométrique. Par définition :

$$\cos x = \text{abscisse de } M, \quad \sin x = \text{ordonnée de } M.$$

Autrement dit $M = (\cos x ; \sin x)$.



✓ Propriété | Lien avec le triangle rectangle

Lorsque $0 < x < \frac{\pi}{2}$, le triangle rectangle de sommets O , $H(\cos x ; 0)$ et M redonne les formules du collège : $\cos x = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$ et $\sin x = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$ (ici l'hypoténuse $OM = 1$). La définition par le cercle **prolonge** ces formules à tous les réels.

★ Théorème | Propriétés fondamentales

Pour tout réel x :

$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}, \quad -1 \leq \cos x \leq 1, \quad -1 \leq \sin x \leq 1.$$

De plus, par enroulement : $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ pour tout entier k .

Démonstration | La relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Le point $M(\cos x ; \sin x)$ est sur le cercle de centre O et de rayon 1. La distance OM vaut donc 1, et le théorème de Pythagore (ou la formule de la distance) donne

$$OM^2 = \cos^2 x + \sin^2 x = 1^2 = 1.$$



✓ Propriété | Signe selon le quadrant et parité

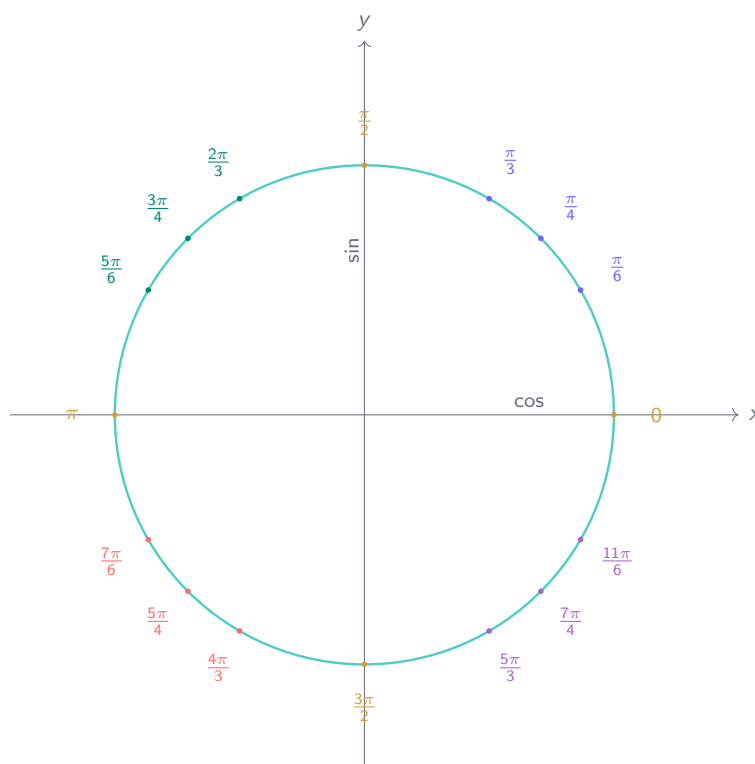
- Le signe de $\cos x$ et $\sin x$ dépend du quadrant où se trouve M (voir la figure des valeurs remarquables).
- Parité** : le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses est l'image de $-x$, d'où

$$\cos(-x) = \cos x \quad (\cos \text{ est paire}), \quad \sin(-x) = -\sin x \quad (\sin \text{ est impaire}).$$

3.4 Valeurs remarquables

★ Théorème | Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Méthode | Toutes les valeurs : cos et sin de 0 à 2π

x	$\cos x$	$\sin x$
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1
$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
π	-1	0

x	$\cos x$	$\sin x$
π	-1	0
$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	0	-1
$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
2π	1	0

Comment retenir tout ça sans rien apprendre par cœur : on ne mémorise que le **premier quadrant** (de 0 à $\frac{\pi}{2}$). Pour les autres, on lit les **signes sur le cercle** (cos = abscisse, sin = ordonnée) et on utilise les **angles associés** (section suivante).

Démonstration / Calcul de $\sin \frac{\pi}{4}$ (exigible)

L'image de $\frac{\pi}{4}$ (soit 45°) est sur la **bissectrice** du premier quadrant, la droite d'équation $y = x$.
Donc M a une abscisse égale à son ordonnée : $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4}$. En reportant dans $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$:

$$2 \sin^2 \frac{\pi}{4} = 1 \implies \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \implies \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(on garde la valeur positive car M est dans le premier quadrant). De même $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. ■

Démonstration / Calcul de $\cos \frac{\pi}{3}$ et $\sin \frac{\pi}{3}$ (exigible)

Soit M l'image de $\frac{\pi}{3}$ (soit 60°) et $I(1;0)$. Le triangle OIM vérifie $OI = OM = 1$ et l'angle $\widehat{IOM} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$. Un triangle isocèle dont l'angle au sommet vaut 60° est **équilatéral** : ses trois angles valent 60° . Le pied H de la hauteur issue de M tombe donc au **milieu** de $[OI]$, soit $H\left(\frac{1}{2};0\right)$.
Or $H = (\cos \frac{\pi}{3}; 0)$, donc

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Ensuite, avec $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$: $\sin^2 \frac{\pi}{3} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, donc $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (positif). ■

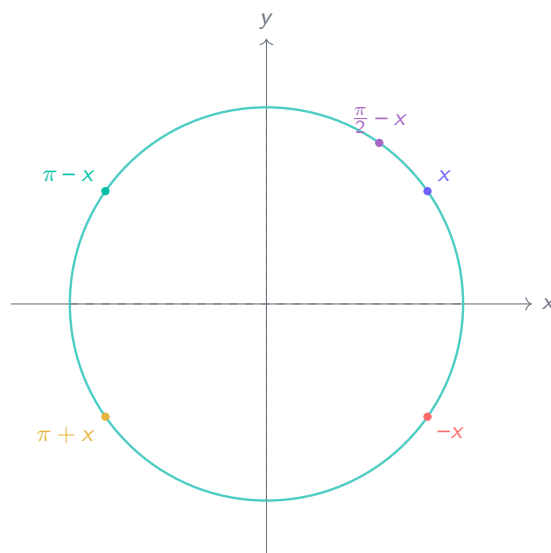
Méthode | Les valeurs de $\frac{\pi}{6}$ par complémentarité

$\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{3}$ sont **complémentaires** ($\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$). On verra (angles associés) que $\cos \frac{\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
et $\sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

3.5 Angles associés★ **Théorème | Formules des angles associés**

Pour tout réel x , en utilisant les symétries du cercle :

	cosinus	sinus
$-x$ (sym. axe Ox)	$\cos(-x) = \cos x$	$\sin(-x) = -\sin x$
$\pi - x$ (sym. axe Oy)	$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$
$\pi + x$ (sym. centre O)	$\cos(\pi + x) = -\cos x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$
$\frac{\pi}{2} - x$ (complémentaire)	$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$	$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$



Démonstration / D'où viennent ces formules : les symétries du cercle

L'idée est toujours la même : l'image de l'angle associé est un **symétrique** du point $M(\cos x ; \sin x)$, et une symétrie transforme les coordonnées de façon connue.

- **Angle $-x$ (symétrie par rapport à l'axe Ox).** Enrouler $-x$ revient à tourner dans l'autre sens : le point obtenu est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses. Or ce symétrique a pour coordonnées $(\cos x ; -\sin x)$. En identifiant avec $(\cos(-x) ; \sin(-x))$:

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x.$$

- **Angle $\pi - x$ (symétrie par rapport à l'axe Oy).** Le point d'angle $\pi - x$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées, de coordonnées $(-\cos x ; \sin x)$. Donc :

$$\cos(\pi - x) = -\cos x, \quad \sin(\pi - x) = \sin x.$$

- **Angle $\pi + x$ (symétrie par rapport au centre O).** Ajouter π , c'est faire un demi-tour : le point est le symétrique de M par rapport à O , de coordonnées $(-\cos x ; -\sin x)$. Donc :

$$\cos(\pi + x) = -\cos x, \quad \sin(\pi + x) = -\sin x.$$

- **Angle $\frac{\pi}{2} - x$ (symétrie par rapport à la droite $y = x$).** Le point d'angle $\frac{\pi}{2} - x$ est le symétrique de M par rapport à la première bissectrice $y = x$, qui **échange l'abscisse et l'ordonnée** : il a pour coordonnées $(\sin x ; \cos x)$. Donc :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$$

- **Angle $\frac{\pi}{2} + x$ (conséquence).** En combinant $(\frac{\pi}{2} + x = \pi - (\frac{\pi}{2} - x))$ ou par symétrie, on obtient :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x.$$

■

Exemple | Utiliser les angles associés

$$\cos \frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}. \quad \sin \frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}. \quad \cos \frac{\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3.6 Les fonctions cosinus et sinus**Définition | Fonctions cos et sin**

Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont définies sur \mathbb{R} . Elles sont :

- **périodiques de période 2π** : $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ (il suffit donc de les connaître sur un intervalle de longueur 2π) ;
- **bornées** : $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$;
- \cos est **paire** (courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées) ; \sin est **impaire** (courbe symétrique par rapport à l'origine).

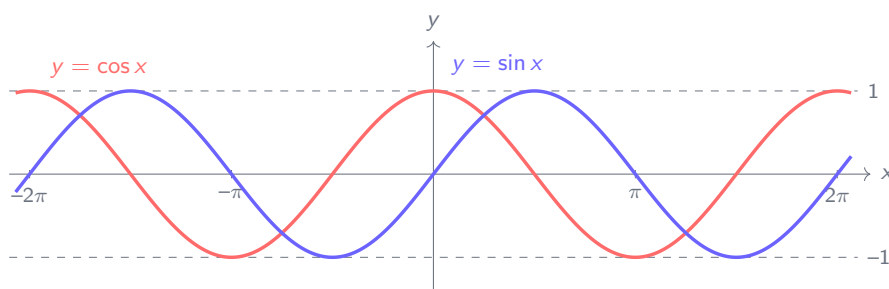
Démonstration | Pourquoi périodiques et pourquoi paire/impaire

Périodicité. Les réels x et $x + 2\pi$ ont la **même image** sur le cercle (un tour complet mesure 2π). Comme \cos et \sin sont lus sur ce point, ils prennent la même valeur :

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x, \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x.$$

2π est donc une **période** : la courbe se répète à l'identique tous les 2π .

Parité. L'image de $-x$ est le symétrique de celle de x par rapport à l'axe Ox (voir angles associés) : $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$. Donc la courbe de \cos est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (\cos **paire**), et celle de \sin est symétrique par rapport à l'origine (\sin **impaire**). ■

**Intuition | Lire les courbes sur le cercle**

La courbe de \sin est exactement la trace de l'**ordonnée** du point M quand x augmente (le point tourne) ; celle de \cos , la trace de son **abscisse**. La courbe de \cos est celle de \sin **décalée** de $\frac{\pi}{2}$ vers la gauche, car $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

3.7 Équations $\cos x = a$ et $\sin x = a$

Méthode | Résoudre avec le cercle

Pour $-1 \leq a \leq 1$, on place la valeur a et on lit les points du cercle :

- $\cos x = a$: on trace la **droite verticale** d'abscisse a ; elle coupe le cercle en deux points symétriques par rapport à l'axe Ox . Si α est une solution, les solutions sont $x = \alpha + 2k\pi$ et $x = -\alpha + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
- $\sin x = a$: on trace la **droite horizontale** d'ordonnée a ; elle coupe le cercle en deux points symétriques par rapport à l'axe Oy . Si β est une solution, les solutions sont $x = \beta + 2k\pi$ et $x = \pi - \beta + 2k\pi$.

Exemple | Résolutions sur $[0; 2\pi[$

$\cos x = \frac{1}{2}$: une solution est $\frac{\pi}{3}$; l'autre est $-\frac{\pi}{3}$, soit $\frac{5\pi}{3}$ sur $[0; 2\pi[$. Solutions : $\left\{ \frac{\pi}{3} ; \frac{5\pi}{3} \right\}$.

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$: une solution est $\frac{\pi}{3}$; l'autre est $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Solutions : $\left\{ \frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3} \right\}$.

3.8 Formulaire complet

★ Théorème | Tout ce qu'il faut savoir, en une page

Mesures. $180^\circ = \pi \text{ rad}$; longueur d'arc sur un cercle de rayon R : $L = R\theta$ (θ en rad).

Définitions. $M = (\cos x ; \sin x)$ sur le cercle de rayon 1. Donc $\cos x = \text{abscisse}$, $\sin x = \text{ordonnée}$.

Relations fondamentales.

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad -1 \leq \cos x \leq 1, \quad -1 \leq \sin x \leq 1.$$

Périodicité et parité.

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x, \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x \quad (k \in \mathbb{Z}); \quad \cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x.$$

Angles associés.

$$\begin{array}{llll} \cos(\pi - x) = -\cos x & \sin(\pi - x) = \sin x & \cos(\pi + x) = -\cos x & \sin(\pi + x) = -\sin x \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x & \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x & \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \end{array}$$

Valeurs remarquables (premier quadrant).

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Équations ($-1 \leq a \leq 1$, α une solution).

$$\cos x = a \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = -\alpha + 2k\pi; \quad \sin x = a \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \alpha + 2k\pi.$$

Intuition | Pour aller plus loin : hors programme de Première

Ces formules ne sont **pas exigibles en Première** (on les voit en Terminale ou en physique), mais elles complètent le tableau et peuvent dépanner.

Formules d'addition.

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \quad \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b, \quad \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

Formules de duplication (cas $b = a$).

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a, \quad \sin(2a) = 2\sin a \cos a.$$

Tangente. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ (définie quand $\cos x \neq 0$) : c'est le coefficient directeur de la droite (OM) .

4 Boîte à outils : réflexes pour le bac

Méthode | Les réflexes essentiels

1. **Conversion** : $180^\circ = \pi$ rad. Multiplie en croix.
2. $\cos x =$ **abscisse**, $\sin x =$ **ordonnée** du point M sur le cercle.
3. **Relation reine** : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (pour passer de l'un à l'autre).
4. **Bornes** : $-1 \leq \cos x \leq 1$, idem pour \sin . (Une équation $\cos x = 2$ n'a pas de solution.)
5. **Valeurs remarquables** : connais par cœur la table $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$.
6. **Angles associés** : dessine le cercle et lis les symétries (ne les apprends pas bêtement).
7. **Périodicité** : \cos et \sin se répètent tous les 2π ; parité : \cos paire, \sin impaire.

Méthode | Mémo : valeurs remarquables ★

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Astuce : pour \sin , lis $\frac{\sqrt{0}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2}$; pour \cos , c'est l'ordre inverse.

Attention | Top 6 des erreurs à éviter

1. **Travailler en degrés** quand l'énoncé est en radians (ou l'inverse).
2. **Écrire** $\cos x = 2$: impossible, \cos est entre -1 et 1 .
3. **Oublier la deuxième solution** d'une équation (le cercle en donne **deux** par tour).
4. **Confondre** $\cos(-x)$ et $-\cos x$. \cos est **paire** : $\cos(-x) = \cos x$.
5. **Oublier les** $+2k\pi$ quand on demande **toutes** les solutions.
6. **Mélanger** \sin et \cos dans les valeurs remarquables : fais le cercle pour vérifier.

Méthode | Algorithme : π par la méthode d'Archimède

On part de l'hexagone inscrit (côté 1 dans un cercle de rayon 1, demi-périmètre 3) et on **double** le nombre de côtés. Le côté du polygone à $2n$ côtés se déduit de celui à n côtés. Le demi-périmètre tend vers π .

```

1 from math import sqrt
2
3 def archimede(doublements):
4     cote, n = 1.0, 6          # hexagone inscrit : 6 cotes de
        longueur 1
5     for _ in range(doublements):

```

```
6         cote = sqrt(2 - sqrt(4 - cote*cote))    # cote du polygone a 2
          n cotes
7         n = 2 * n
8         return n * cote / 2                    # demi-perimetre -> approximation de
          pi
9
10    for k in range(6):
11        print(archimede(k))                    # 3.0, 3.105, 3.132, ... -> 3.14159...
```


5 Exercices

Exercice 1 ★★ : Conversions

1. Convertir en radians : 30° , 90° , 135° , 150° .
2. Convertir en degrés : $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2}$.

Exercice 2 ★★ : Valeurs remarquables

Donner sans calculatrice :

- | | |
|---|---|
| a) $\cos \frac{\pi}{4}$ et $\sin \frac{\pi}{4}$ | c) $\cos \frac{\pi}{6}$ et $\sin \frac{\pi}{6}$ |
| b) $\cos \frac{\pi}{3}$ et $\sin \frac{\pi}{3}$ | d) $\cos \frac{\pi}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{2}$ |

Exercice 3 ★★ : La relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$

1. On sait que $\cos x = \frac{3}{5}$ et que $x \in \left] 0 ; \frac{\pi}{2} \right[$. Calculer $\sin x$.
2. On sait que $\sin x = -\frac{2}{3}$ et que $x \in \left] \pi ; \frac{3\pi}{2} \right[$. Calculer $\cos x$.

Exercice 4 ★★ : Angles associés

Calculer, à l'aide des valeurs remarquables et des angles associés :

- | | |
|--------------------------|---|
| a) $\cos \frac{2\pi}{3}$ | c) $\cos \frac{7\pi}{6}$ |
| b) $\sin \frac{5\pi}{6}$ | d) $\sin \left(-\frac{\pi}{3} \right)$ |

Exercice 5 ★★ : Parité et périodicité

Simplifier :

- | | |
|------------------------|--------------------------------|
| a) $\cos(x + 2\pi)$ | c) $\cos(-x) - \cos x$ |
| b) $\sin(-x) + \sin x$ | d) $\sin(x + 2\pi) + \cos(-x)$ |

Exercice 6 ★★ : Placer sur le cercle

Placer sur le cercle trigonométrique les points images de $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{2}$, puis donner leurs coordonnées $(\cos; \sin)$.

Exercice 7 ★★ : Équation $\cos x = a$

Résoudre sur $[0; 2\pi[$:

- | | |
|----------------------------------|-----------------|
| a) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | c) $\cos x = 0$ |
| b) $\cos x = -\frac{1}{2}$ | d) $\cos x = 2$ |

Exercice 8 ★★★ : Équation $\sin x = a$ Résoudre sur $[0; 2\pi[$:

a) $\sin x = \frac{1}{2}$

c) $\sin x = 1$

b) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 9 ★★★ : Longueur d'arcUne roue de rayon 35 cm tourne d'un angle de $\frac{2\pi}{3}$.

1. Quelle longueur d'arc un point du bord parcourt-il ?
2. Combien de tours faut-il pour parcourir 10 m ? (valeur approchée)

Exercice 10 ★★★ : Lecture de courbesOn donne les courbes de deux fonctions f et g : l'une passe par $(0; 1)$, l'autre par $(0; 0)$, toutes deux de période 2π .

1. Laquelle est cos, laquelle est sin ? Justifier par la valeur en 0.
2. Quelle courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ? par rapport à l'origine ?

Exercice 11 ★★★ : Simplifier avec les angles associés

Simplifier au maximum :

1. $A = \cos(\pi - x) + \cos(\pi + x)$.
2. $B = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(-x) + \cos(\pi + x)$.

Exercice 12 ★★★ : Démonstrations de cours

1. Démontrer que $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. Démontrer que $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 13 ★★★ : Équations un peu plus finesRésoudre sur $[0; 2\pi[$:

1. $2 \cos x - 1 = 0$.
2. $\cos x = \sin x$ (indication : sur $[0; 2\pi[$, regarder la bissectrice).

Exercice 14 ★★★ : Signe et encadrementSoit $f(x) = 2 + \cos x$.

1. Justifier que pour tout réel x : $1 \leq f(x) \leq 3$.
2. En déduire que $f(x) > 0$ pour tout x , et donner les valeurs de x de $[0; 2\pi[$ où f atteint son maximum.

Exercice 15 ★★★ : **Modélisation périodique**

La hauteur des marées (en mètres) dans un port est modélisée par $h(t) = 5 + 3 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$, où t est le temps en heures.

1. Quelle est la période (en heures) ? Interpréter.
2. Donner la hauteur maximale et la hauteur minimale, et les heures où elles sont atteintes sur $[0 ; 12[$.
3. Résoudre $h(t) = 6,5$ sur $[0 ; 12[$.

6 Problème : *La grande roue* ★★★

Problème style prépa

Une grande roue de rayon 30 m a son centre situé à 35 m du sol. Elle effectue un tour complet en 4 minutes, à vitesse constante. Une nacelle part du **point le plus bas** à l'instant $t = 0$ (en minutes). On note $h(t)$ sa hauteur (en mètres). Ce problème mobilise tout le chapitre : enroulement, valeurs remarquables, parité/périodicité et équations.

Partie A : modélisation

1. Justifier que la hauteur du centre est 35 m, le point le plus haut à 65 m, le plus bas à 5 m.
2. En 4 minutes la roue fait un tour (2π). Justifier que l'angle parcouru au temps t est $\frac{\pi}{2}t$ (en radians).
3. En déduire que $h(t) = 35 - 30 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$. (Vérifier $h(0) = 5$.)

Partie B : hauteurs remarquables

4. Calculer $h(1)$, $h(2)$ et $h\left(\frac{2}{3}\right)$ (utiliser les valeurs remarquables).
5. À quels instants de $[0 ; 4[$ la nacelle est-elle au point le plus haut ? le plus bas ?

Partie C : équations

6. Résoudre $h(t) = 50$ sur $[0 ; 4[$. (On se ramènera à $\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) = -\frac{1}{2}$.)
7. Résoudre $h(t) = 20$ sur $[0 ; 4[$.

Partie D : périodicité

8. Montrer que $h(t + 4) = h(t)$ pour tout t . Interpréter concrètement.
9. Sur un même tour, pendant combien de temps la nacelle est-elle à plus de 50 m du sol ? (utiliser la Partie C).

7 ✓ Corrigés détaillés

Intuition | Comment lire un corrigé

Chaque corrigé rappelle la méthode et détaille tous les calculs. Pour la trigonométrie, le réflexe est presque toujours : **dessine le cercle**.

Corrigé 1

Démonstration

1. $30^\circ = \frac{30}{180}\pi = \frac{\pi}{6}$; $90^\circ = \frac{\pi}{2}$; $135^\circ = \frac{135}{180}\pi = \frac{3\pi}{4}$; $150^\circ = \frac{5\pi}{6}$.
2. $\frac{\pi}{3} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$; $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$; $\frac{5\pi}{6} = 150^\circ$; $\frac{3\pi}{2} = 270^\circ$.

Corrigé 2

Démonstration

- a) $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. b) $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- c) $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. d) $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

Corrigé 3

Démonstration

1. $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, donc $\sin x = \pm \frac{4}{5}$. Comme $x \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$ (premier quadrant), $\sin x > 0$: $\sin x = \frac{4}{5}$.
2. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$, donc $\cos x = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$. Comme $x \in]\pi ; \frac{3\pi}{2}[$ (troisième quadrant), $\cos x < 0$: $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Corrigé 4

Démonstration

- a) $\cos \frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.
- b) $\sin \frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.
- c) $\cos \frac{7\pi}{6} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- d) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Corrigé 5

Démonstration

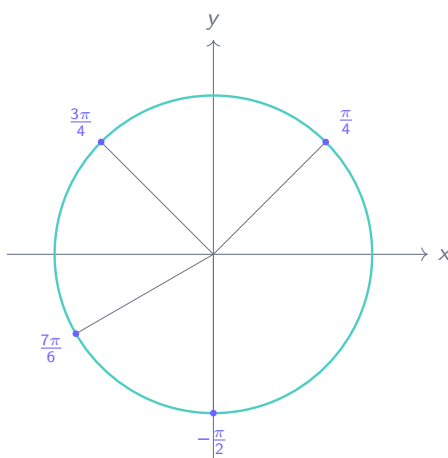
- a)** $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ (périodicité). **b)** $\sin(-x) + \sin x = -\sin x + \sin x = 0$.
c) $\cos(-x) - \cos x = \cos x - \cos x = 0$. **d)** $\sin(x + 2\pi) + \cos(-x) = \sin x + \cos x$.

Corrigé 6

Démonstration

On place chaque image et on lit ses coordonnées (cos ; sin) :

$$\frac{\pi}{4} \rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \frac{3\pi}{4} \rightarrow \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \frac{7\pi}{6} \rightarrow \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad -\frac{\pi}{2} \rightarrow (0, -1).$$



Corrigé 7

Démonstration

- a)** $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$: solutions $\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4} \equiv \frac{7\pi}{4}$. $S = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}$.
b) $\cos x = -\frac{1}{2}$: solutions $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3} \equiv \frac{4\pi}{3}$. $S = \left\{\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right\}$.
c) $\cos x = 0$: $S = \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}$.
d) $\cos x = 2$: impossible car $-1 \leq \cos x \leq 1$. $S = \emptyset$.

Corrigé 8

Démonstration

- a)** $\sin x = \frac{1}{2}$: solutions $\frac{\pi}{6}$ et $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$. $S = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$.
b) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$: angle de référence $\frac{\pi}{4}$, solutions $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ et $2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$. $S = \left\{\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}$.
c) $\sin x = 1$: $S = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

$$\text{d) } \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} : \text{ solutions } \frac{\pi}{3} \text{ et } \frac{2\pi}{3}. S = \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right\}.$$

Corrigé 9

Démonstration

1. $L = R\theta = 35 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{70\pi}{3} \approx 73,3 \text{ cm}.$
2. Un tour complet correspond à une longueur $2\pi R = 2\pi \times 35 = 70\pi \approx 219,9 \text{ cm}.$ Pour 10 m = 1000 cm : $\frac{1000}{70\pi} \approx 4,5 \text{ tours}.$

Corrigé 10

Démonstration

1. $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$: la courbe passant par $(0; 1)$ est celle de \cos , celle passant par $(0; 0)$ est celle de \sin .
2. \cos est **paire** : sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. \sin est **impaire** : sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.

Corrigé 11

Démonstration

1. $A = \cos(\pi - x) + \cos(\pi + x) = (-\cos x) + (-\cos x) = -2 \cos x.$
2. $B = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(-x) + \cos(\pi + x) = \cos x + (-\sin x) + (-\cos x) = -\sin x.$

Corrigé 12

Démonstration

1. L'image de $\frac{\pi}{4}$ est sur la bissectrice $y = x$, donc $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4}$. Avec $\cos^2 + \sin^2 = 1$: $2 \sin^2 \frac{\pi}{4} = 1$, d'où $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (valeur positive).
2. Le triangle OIM (M image de $\frac{\pi}{3}$) est isocèle ($OI = OM = 1$) d'angle au sommet 60° : il est équilatéral. Le pied de la hauteur issue de M est le milieu de $[OI]$, d'abscisse $\frac{1}{2}$, donc $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Puis $\sin^2 \frac{\pi}{3} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, d'où $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Corrigé 13

Démonstration

1. $2 \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$. Solutions sur $[0; 2\pi[$: $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$. $S = \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right\}.$
2. $\cos x = \sin x$: les images dont l'abscisse égale l'ordonnée sont sur la bissectrice $y = x$, qui coupe le cercle en $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$. $S = \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right\}.$

Corrigé 14

Démonstration

1. Pour tout x , $-1 \leq \cos x \leq 1$. En ajoutant 2 : $1 \leq 2 + \cos x \leq 3$, soit $1 \leq f(x) \leq 3$.
2. En particulier $f(x) \geq 1 > 0$. Le maximum $f(x) = 3$ est atteint quand $\cos x = 1$, c'est-à-dire $x = 0$ sur $[0; 2\pi[$.

Corrigé 15

Démonstration

1. $\cos(\frac{\pi}{6}t)$ a pour période $\frac{2\pi}{\pi/6} = 12$. La marée se répète toutes les **12 heures**.
2. Maximum quand $\cos = 1$: $h = 5 + 3 = 8$ m, en $t = 0$. Minimum quand $\cos = -1$: $h = 5 - 3 = 2$ m, quand $\frac{\pi}{6}t = \pi$, soit $t = 6$ h.
3. $h(t) = 6,5 \Leftrightarrow 3 \cos(\frac{\pi}{6}t) = 1,5 \Leftrightarrow \cos(\frac{\pi}{6}t) = \frac{1}{2}$. Donc $\frac{\pi}{6}t = \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{\pi}{6}t = -\frac{\pi}{3} \equiv \frac{5\pi}{3}$, soit $t = 2$ ou $t = 10$. $S = \{2; 10\}$ heures.

Corrigé du problème : La grande roue

Démonstration / Partie A : modélisation

1. Le centre est à 35 m. Le rayon étant 30 m, le point le plus haut est à $35 + 30 = 65$ m et le plus bas à $35 - 30 = 5$ m.
2. La roue parcourt 2π radians en 4 min à vitesse constante : l'angle parcouru au temps t est $\frac{2\pi}{4}t = \frac{\pi}{2}t$.
3. La nacelle part du bas ; sa hauteur au-dessus du centre est $-30 \cos(\frac{\pi}{2}t)$ (en $t = 0$, angle nul, position -30 , donc en bas). D'où $h(t) = 35 - 30 \cos(\frac{\pi}{2}t)$, et $h(0) = 35 - 30 = 5 \checkmark$.

Démonstration / Partie B : hauteurs remarquables

4. $h(1) = 35 - 30 \cos \frac{\pi}{2} = 35 - 0 = 35$ m. $h(2) = 35 - 30 \cos \pi = 35 + 30 = 65$ m. $h(\frac{2}{3}) = 35 - 30 \cos \frac{\pi}{3} = 35 - 30 \times \frac{1}{2} = 20$ m.
5. Plus haut ($h = 65$) quand $\cos(\frac{\pi}{2}t) = -1$, soit $\frac{\pi}{2}t = \pi$, donc $t = 2$. Plus bas ($h = 5$) quand $\cos(\frac{\pi}{2}t) = 1$, soit $t = 0$.

Démonstration / Partie C : équations

6. $h(t) = 50 \Leftrightarrow 35 - 30 \cos(\frac{\pi}{2}t) = 50 \Leftrightarrow \cos(\frac{\pi}{2}t) = -\frac{1}{2}$. Donc $\frac{\pi}{2}t = \frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{\pi}{2}t = \frac{4\pi}{3}$, soit $t = \frac{4}{3}$ ou $t = \frac{8}{3}$ min.
7. $h(t) = 20 \Leftrightarrow \cos(\frac{\pi}{2}t) = \frac{1}{2}$. Donc $\frac{\pi}{2}t = \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{5\pi}{3}$, soit $t = \frac{2}{3}$ ou $t = \frac{10}{3}$ min.

Démonstration / Partie D : périodicité

8. $h(t + 4) = 35 - 30 \cos\left(\frac{\pi}{2}(t + 4)\right) = 35 - 30 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + 2\pi\right) = 35 - 30 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) = h(t)$. La hauteur se répète à chaque tour (toutes les 4 minutes).

9. La nacelle est à plus de 50 m quand $h(t) > 50$, soit $\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) < -\frac{1}{2}$, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2}t \in \left] \frac{2\pi}{3} ; \frac{4\pi}{3} \right]$, donc $t \in \left] \frac{4}{3} ; \frac{8}{3} \right]$. Durée : $\frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$ min, soit 1 min 20 s.

Bilan de la fiche. Tu sais désormais : convertir degrés et radians, placer un réel sur le cercle trigonométrique, lire $\cos x$ et $\sin x$ comme coordonnées, utiliser $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, connaître les valeurs remarquables et les angles associés, exploiter parité et périodicité, et résoudre $\cos x = a$, $\sin x = a$. Le réflexe central : **quand tu bloques, dessine le cercle.**